

西安建筑科技大学

2019 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 1 页

考试科目: _____ (818) 高等代数

适用专业: _____ 数 学

一、填空题 (共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分)

1. 设 x_1, x_2, x_3 为 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ 的根, 则

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $g(x) = (x - c)^2$, $f(x) = x^5 - 5qx + 4r$, 则 $g(x) \mid f(x)$ 的条件是 _____.

3. 已知矩阵 $A_{n \times n}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^* = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = x^2$ 和 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1 + x, \eta_3 = (1 + x)^2$ 是线性空间 $P_3[x]$ 两组基, 则由基 η_1, η_2, η_3 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵为 _____.

5. 已知方阵 A 满足 $A^3 + 2A^2 - A - 3E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A + E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 _____.

二、(10 分) 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

三、(15 分) 设 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 求 $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$ 的基和维数, 其中

$\alpha_1 = (2, -1, 0, 1), \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1), \alpha_3 = (0, 1, 2, 3); \beta_1 = (1, 0, 1, 2), \beta_2 = (-1, 2, 3, 4).$

四、(15 分) 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 解空间 (是 R^4 的子空间) 的一组标准正交基,

并将其扩充为 R^4 的标准正交基.

五、(15 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $A^{-1}XA = 2XA - 3E$, 求矩阵 X .

六、(20 分) 设 $M_2(F)$ 是数域 F 上一切二阶矩阵所组成的向量空间, 对于任意 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$,

$$\text{定义 } \sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a-b & -3a \\ 3d & 3c \end{pmatrix},$$

(1) 证明 σ 是 $M_2(F)$ 上的线性变换, 并且写出 σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(2) 求出 σ 的特征根.

(3) 求出 $M_2(F)$ 的一个基, 使 σ 在这组基下的矩阵是对角阵.

七、(15 分) 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x) \in P[x]$, 证明

$$(f_1(x) \cdots f_m(x), g_1(x) \cdots g_n(x)) = 1 \Leftrightarrow (f_i(x), g_j(x)) = 1, \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n.$$

八、(10 分) 设整系数线性方程组为 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 证明对任意整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有整数解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}| = \pm 1$.

九、(20 分) 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$, 证明:

(1) $\sigma^{-1}(0) = \{\alpha - \sigma(\alpha) \mid \alpha \in V\}$. (2) $V = \sigma^{-1}(0) \oplus \sigma(V)$.

(3) 如果 τ 是 V 的线性变换, 且 $\sigma^{-1}(0)$, $\sigma(V)$ 都是 τ 的不变子空间, 则 $\sigma\tau = \tau\sigma$.