

西安建筑科技大学

2018 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 2 页

考试科目: (818) 高等代数

适用专业: 数学

一、填空题 (共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分)

- 假设 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ 除以 $x + 1$ 得余数是 7, 除以 $x - 1$ 的余数是 5, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 x_1, x_2, x_3 是 3 次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的三个根, 则 3 阶行列式
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$
- 若二次型 $2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2tx_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 在三维空间 F^3 中, 线性变换 T 满足: $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$. 则 T 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 $W = \{\alpha = a_2 e^x x^2 + a_1 e^x x + a_0 e^x \mid a_2, a_1, a_0 \in R\}$ 是实数域上线性空间 R^3 的子空间, 则其一组基为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 设 A 为 n 阶正定矩阵, 其特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则其伴随矩阵 A^* 的特征值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、(15 分) 计算 n 阶行列式
$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}.$$

三、(10 分) 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 的解空间为 V . 求 (1) V 的基和维数; (2) $V^\perp$ 的基和维数.

四、(15 分) 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_3 = b \end{cases}$$
 的通解为 $k\eta + \xi$, 其中 ξ 为方程组的一个特解, η 是导出组的基础解系, k 为任意常数.

求 (1) a, b 的值;

(2) 方程组的通解.

五、(20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为数域 P 上的二阶方阵, 定义 $P^{2 \times 2}$ 上变换为: $\sigma(X) = AX - XA, X \in P^{2 \times 2}$.

- 证明 σ 为线性变换;
- 求 σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵;
- 证明 σ 必以 0 为特征值, 并求出 0 作为 σ 的特征值的重数.

六、(20 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 (b > 0)$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

- 写出二次型的矩阵 A ;
- 求 a, b 的值;
- 利用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

七、(15 分) 设 $f(x) = af_1(x) + bg_1(x), g(x) = cf_1(x) + dg_1(x)$, 且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

证明: $(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$.

八、(10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, 证明:

- 如果 $\gamma \in V$ 使 $(\gamma, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 那么 $\gamma = 0$;
- 如果 $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ 使对任一 $\alpha \in V$ 有 $(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$, 那么 $\gamma_1 = \gamma_2$.

九、(15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量, $\beta_i = \sum_{j=1}^r k_{ij} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, r$. 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关的充

分必要条件是
$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$