西 安 建 筑 科 技 大 学

2018 年攻读硕士学位研究生招生考试试题

(答案书写在本试题纸上无效。考试结束后本试题纸须附在答题纸内交回) 共 2 页

考试科目：（620）数学分析

适用专业：数学

一、计算题（共 6 题，每题 10 分，共 60 分）

1、设 $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}, \forall n\in\mathbb{N}$ 。求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 。

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$。求 a,b 的值使得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

3、设抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆 Γ 。求椭圆 Γ 上的点到原点距离的最小值与最大值。

4、设 $v(y)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，函数 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)dy\ x\in(0,1)$，其中

$k(x,y)=\begin{cases} x(1-y) & x\le y \\ y(1-x) & x>y \end{cases}$。求 $u''(x)$ 。

5、求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截得部分 Σ 的面积。

6、设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(2x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+4z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$ 。

二、证明题（共 6 题，每题 15 分，共 90 分）

7、求证 （1）$\frac{\tan b}{b}>\frac{\tan a}{a}, 0<a<b<\frac{\pi}{2}$。（2）$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}, x>0$ 。

8、设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(n\int_0^1 x^n f(x)dx)=f(1)$ 。

9、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=0, f(1)=1$ 。

求证:（1）存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$；（2）存在 $\eta_1\ne\eta_2, \eta_1,\eta_2\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$。

10、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在连续的二阶导数且 $f''(x)\ge 0$ 。

求证：（1） $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$；（2）如果 $f(x)\le 0$，则 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le f(x)$ 。

11、（1）设正项函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛且 $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in D$ 有 $|v_n(x)|\le u_n(x)$ 。

求证：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

（2）求证：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ 在 $|x|>r>1$ 时一致收敛。

12、设常数 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)$ 。

求证：至少存在 $x_0\in[a,+\infty)$ 使得 $f(x_0)=f(x_0-a)$ 。